ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών και να προσδιοριστεί το μέγιστο πεδίο ορισμού της λύσης:

1. $y'-2y = x$, $y(0)=0$.

2. $y'+\frac{1}{x}y = 2$, $y(1)=1$.

3. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $2xyy'+y^2 = e^x$.

4. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $y'=\dfrac{1}{2e^y - x}$.

ΛΥΣΗ

1. Η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική και έχει ως ολοκληρώνοντα παράγοντα τη συνάρτηση

$$\mu(x) = \exp\left\{-\int 2x dx\right\} = e^{-x^2}. \quad (1)$$

Έτσι, πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη της με $\mu(x)$ παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}y\right) = xe^{-x^2},$$

και άρα

$$e^{-x^2}y = \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C,$$

ή

$$y = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Για την ικανοποίηση της αρχικής συνθήκης θέτουμε στην (2) $x=0$, $y=0$ και παίρνουμε $C = 1/2$. Συνεπώς, η λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται από τον τύπο

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - 1\right). \quad (3)$$

Το μέγιστο πεδίο ορισμού της λύσης είναι το $(-\infty,\infty)$ αφού οι συναρτήσεις y, y' και <u>όλοι</u> οι συντελεστές της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης ορίζονται σ' αυτό.

2. Η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική και έχει ως ολοκληρώνοντα παράγοντα τη συνάρτηση

$$\mu(x) = \exp\left\{\int \frac{1}{x}dx\right\} = x \quad . (1)$$

Έτσι, πολλαπλασιάζοντας αμφότερα τα μέλη της με $\mu(x)$ παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}(xy) = 2x \quad ,$$

και άρα

$$xy = \int 2x dx = x^2 + C \quad ,$$

ή

$$y = x + \frac{C}{x} \quad . (2)$$

Για την ικανοποίηση της αρχικής συνθήκης θέτουμε στην (2) $x=1$, $y=1$ και παίρνουμε $C=0$. Συνεπώς, η λύση του δοθέντος προβλήματος δίνεται από τον τύπο

$$y = x \quad . (3)$$

Αν και οι συναρτήσεις y και y' ορίζονται σε όλο το R, το μέγιστο διάστημα ορισμού της λύσης του προβλήματος είναι το $(0,\infty)$ αφού αυτό περιέχει το σημείο $x=1$ της αρχικής συνθήκης ενώ παράλληλα ο συντελεστής $1/x$ στη διαφορική εξίσωση ορίζεται παντού εκτός από το $x=0$. Αξίζει πάντως να σημειωθεί ότι αν η διαφορική εξίσωση είχε δοθεί αρχικά στη μορφή

$$xy' + y = 2x$$

τότε το μέγιστο διάστημα ορισμού της λύσης του προβλήματος θα ήταν το $(-\infty, \infty)$.

3. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση δεν είναι γραμμική. Εκτελώντας όμως την αντικατάσταση

$$u = y^2, \quad (1)$$

έχουμε

$$\frac{du}{dx} = 2y\frac{dy}{dx},$$

και άρα

$$x\frac{du}{dx} + u = e^x, \quad (2)$$

η οποία είναι γραμμική εξίσωση ως προς u. Έτσι, από την (2) έχουμε

$$\frac{d}{dx}(xu) = e^x,$$

ή

$$xu = \int e^x dx = e^x + C,$$

και λόγω της (1)

$$y^2 = \frac{1}{x}(e^x + C). \quad (3)$$

4. Η δοθείσα διαφορική εξίσωση δεν είναι γραμμική. Εναλλάσοντας όμως το ρόλο των μεταβλητών και θεωρώντας το x ως συνάρτηση του y, προκύπτει ότι

$$\frac{dx}{dy} + x = 2e^y, \quad (1)$$

η οποία είναι γραμμική εξίσωση ως προς $x(y)$. Έτσι, από την (1) έχουμε

$$\frac{d}{dx}(xe^y) = 2e^{2y},$$

οπότε

$$xe^{y} = e^{2y} + C,$$

ή

$$x = e^{y} + Ce^{-y}, \quad (2)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Η σχέση (2) δίνει τη γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης σε *πεπλεγμένη μορφή*.